

Beispiel 38 \mathbb{R}^n hat auch andere Basen als die Standardnormalbasis, nämlich jede linear unabhängige Menge von drei Vektoren ist eine Basis von \mathbb{R}^3 , z. B. ist für \mathbb{R}^3 die folgende Menge eine Basis:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Das haben wir in Beispiel 37 festgestellt. Dagegen ist

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

keine Basis, wie aus Beispiel 36 hervorgeht. Analog verhält es sich allgemein mit \mathbb{R}^n .

2.5 Skalarprodukt, Länge, Winkel und Vektorprodukt

Definition 34 (Skalarprodukt) Es sei V ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{R} . Eine Abbildung $\cdot : V \times V \rightarrow \mathbb{R} : (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} \cdot \vec{y}$ ist ein *Skalarprodukt* auf V , wenn \cdot für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ und $k \in \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- a) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ (Symmetrie bzw. Kommutativität)
- b) Bilinearität:
 - 1) $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$
 - 2) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$
 - 3) $(k \cdot \vec{x}) \cdot \vec{y} = k \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y})$
 - 4) $\vec{x} \cdot (k \cdot \vec{y}) = k \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y})$
- c) $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$ (positive Definitheit)
- d) $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

Definition 35 (Standardskalarprodukt) Für die reellen Vektorräume \mathbb{R}^n ist das *Standardskalarprodukt* folgendermaßen definiert:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$$

Satz 35 Das Standardskalarprodukt ist ein Skalarprodukt.

BEWEIS Übung.

Definition 36 (Norm) Es sei V ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R} : \vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|$ heißt *Norm*, wenn $\|\cdot\|$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$ und $k \in \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

- 1) $\|\vec{x}\| > 0$ für $\vec{x} \neq \vec{0}$ (positive Definitheit)
- 2) $\|\vec{x}\| = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$
- 3) $\|k \cdot \vec{x}\| = |k| \cdot \|\vec{x}\|$ (Homogenität)
- 4) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (Dreiecksungleichung)

Definition 37 (Skalarproduktnorm) Es sei V ein reeller Vektorraum. Dann nennt man eine Norm, die vermittelt

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

durch ein Skalarprodukt induziert wird, *Skalarproduktnorm*, insbesondere die durch das Standardskalarprodukt induzierte Norm

$$\|\vec{x}\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Man nennt Vektorräume, in denen die Norm durch ein Skalarprodukt induziert wird, *euklidische Vektorräume*.

Bemerkung 15 Der Zahlenwert $\|\vec{x}\|$ lässt sich generell für jede Norm als Länge des Vektors \vec{x} interpretieren. Für den Fall der Norm, die durch das Standardskalarprodukt induziert wird, entspricht $\|\vec{x}\|$ der Längendefinition, die man aus der euklidischen Elementargeometrie kennt (daher wird diese Norm auch euklidische Norm genannt).

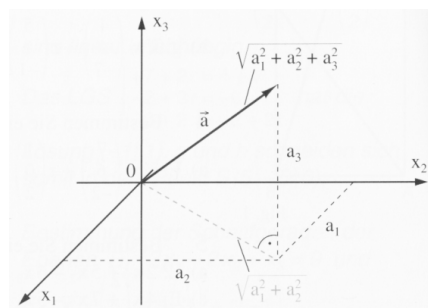


Abbildung 2.3: Länge in \mathbb{R}^3 über das Standardskalarprodukt

In der Grafik 2.3 kann man erkennen, dass die Norm

$$\|\vec{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

der Methode entspricht, wie man in der (euklidischen) Elementargeometrie die Länge einer Raumdiagonalen durch zweifache Anwendung des Satzes des Pythagoras berechnet.

Es ist noch zu zeigen, dass die Skalarproduktnorm überhaupt eine Norm ist. Als Hilfsmittel dient dazu das folgende Lemma.

Lemma 3 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) *In jedem euklidischen Vektorraum V gilt*

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

für alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$.

BEWEIS Für $\vec{y} = \vec{0}$ ist die Ungleichung erfüllt. Es sei nun $\vec{y} \neq \vec{0}$. Man setze $k = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{y}\|^2} \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\vec{x} - k \cdot \vec{y}) \cdot (\vec{x} - k \cdot \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} - 2 \cdot k \cdot \vec{x} \cdot \vec{y} + k^2 \cdot \vec{y} \cdot \vec{y} \\ &= \|\vec{x}\|^2 - 2 \cdot \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{\|\vec{y}\|^2} + \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{\|\vec{y}\|^2} \\ &= \|\vec{x}\|^2 - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{\|\vec{y}\|^2} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2$, also $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$.

Satz 36 *Es sei V ein reeller Vektorraum. Dann erfüllt die Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R} : \vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|$, die vermittelt*

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

durch ein Skalarprodukt induziert ist, die Eigenschaften einer Norm.

BEWEIS Die ersten drei Eigenschaften einer Norm lassen sich leicht nachrechnen. Interessant ist die Geltung der Dreiecksungleichung. Hier gilt:

$$\begin{aligned} (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 &= \|\vec{x}\|^2 + 2 \cdot \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 \text{ (binomische Formel)} \\ &\geq \|\vec{x}\|^2 + 2 \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 \text{ (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)} \\ &= \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 \end{aligned}$$

Also gilt insgesamt $\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \geq \|\vec{x} + \vec{y}\|$.

Definition 38 (Winkel) *Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Für $\vec{x}, \vec{y} \in V$ mit $\vec{x} \neq \vec{0} \neq \vec{y}$ ist der Winkel $\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$ zwischen \vec{x} und \vec{y} definiert als:*

$$\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = \arccos \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \right) \in [0; \pi]$$

Bemerkung 16 Die Definition ist von der euklidischen Elementargeometrie her motiviert. Allgemein für Dreiecke (siehe Abbildung 2.4) gilt eine Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras, nämlich der Kosinussatz. Er besagt: In jedem Dreieck gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

(für $\gamma = 90^\circ$ ergibt sich als Spezialfall der Satz des Pythagoras). Formt man diese

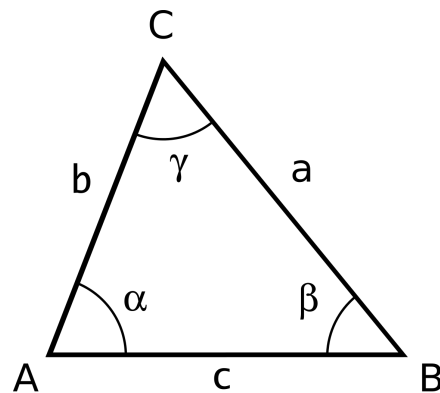


Abbildung 2.4: Dreieck

Gleichung um, so ergibt sich

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Nun kann man die Seiten a und b als Vektoren \vec{a} und \vec{b} auffassen. Dann ist c der Differenzvektor $\vec{a} - \vec{b}$. Somit ergibt sich

$$\cos(\gamma) = \frac{||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 - ||\vec{a} - \vec{b}||^2}{2 \cdot ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||}.$$

Verwendet man das Standardskalarprodukt, so erhält man:

$$\begin{aligned} \cos(\gamma) &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2}{2 \cdot ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||} \\ &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - a_1^2 + 2a_1b_1 - b_1^2 - a_2^2 + 2a_2b_2 - b_2^2}{2 \cdot ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||} \\ &= \frac{2a_1b_1 + 2a_2b_2}{2 \cdot ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||} \\ &= \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||} \end{aligned}$$

$$= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

bzw.

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}\right)$$

Unter Verwendung des Standardskalarproduktes entspricht die Definition genau der elementargeometrischen Vorstellung des Winkels, aber auch bei anderen Skalarprodukten lässt sich diese Definition verwenden.

Definition 39 (Vektorprodukt) Man betrachte \mathbb{R}^3 als euklidischen Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt. Dann nennt man die Abbildung

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -(x_1 y_3 - x_3 y_1) \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

das *Vektorprodukt* oder *Kreuzprodukt* auf \mathbb{R}^3 .

Bemerkung 17 Das Vektorprodukt der Vektoren \vec{a} und \vec{b} lässt sich geometrisch als Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ interpretieren, der senkrecht auf der von den beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht und mit ihnen ein Rechtssystem bildet. Die Länge dieses Vektors entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird (siehe Abbildung 2.5).

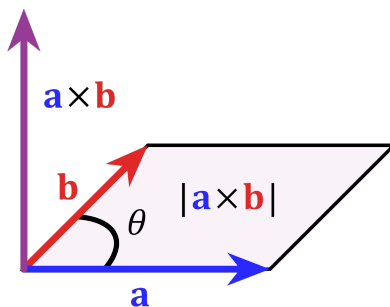


Abbildung 2.5: Vektorprodukt: Geometrische Veranschaulichung