Satz 3.60 (Leibniz-Reihe)**.** *Es gilt*

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Die Konvergenz der Reihe folgt direkt aus dem Leibniz-Kriterium (Satz 3.47); den Beweis, dass ihr Grenzwert gleich $\frac{\pi}{4}$ ist, können wir später mit Mitteln der Potenzreihenentwicklung von Funktionen geben.

obige Reihe ist die Taylorreihe für arctan(1) mit Entwicklungspunkt 0.

4 Reelle Funktionen

4.1 Eigenschaften von Funktionen

Wir beginnen mit der Wiederholung einiger Grundbegriffe.

Definition 4.1. Sei $f : D \to M$ eine Funktion. Dann bezeichnen wir für $I \subset D$

$$f(I) \;:=\; \big\{ f(x) \,:\, x \in I \big\}$$

als das *Bild* der Menge I unter f, und für $J \subset M$

$$f^{-1}(J) \;:=\; \big\{ x \in D \,:\, f(x) \in J \big\}$$

als *Urbild* der Menge J unter f.

Definition 4.2. Sind $f : D \to M$ und $g : I \to J$ Funktionen, wobei $M \subset I$ gilt; dann ist die *Verknüpfung* $g \circ f$ definiert durch

$$g \circ f : D \to J, \qquad (g \circ f)(x) \;=\; g\big(f(x)\big).$$

Lies: „g nach f."

Es wird also zuerst die Funktion f angewendet, anschließend auf den erhaltenen Funktionswert die Funktion g. Daher rührt die Bezeichnung „g nach f."

Definition 4.3. Eine Funktion $f : D \to M$ heißt

(a) *injektiv*, falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

(b) *surjektiv*, falls zu jedem $y \in M$ ein $x \in D$ existiert, sodass $f(x) = y$.

(c) *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Bemerkung 4.4.

- Injektivität bedeutet, dass verschiedene Elemente des Definitionsbereiches auf verschiedene Elemente im Wertebereich abgebildet werden. Wenn man nur den Funktionswert kennt, kann man trotzdem eindeutig auf das Funktionsargument zurückschließen. Für jedes $y \in M$ gibt es *höchstens* ein $x \in D$, welches die Gleichung $f(x) = y$ löst.

- Aus dem letztgenannten Grund ist Injektivität bspw. eine grundlegende Forderung an Abbildungen, die Verschlüsselungsverfahren umsetzen.

- Surjektivität bedeutet, dass jedes Element des Wertebereiches Bild eines Elementes des Definitionsbereiches ist. Mit anderen Worten: Jedes Element des Wertebereiches wird von der Funktion „getroffen". Für jedes $y \in M$ gibt es *mindestens* ein $x \in D$, welches die Gleichung $f(x) = y$ löst.

- Bijektivität bedeutet, dass jedes Element des Wertebereiches Bild *genau* eines Elementes des Definitionsbereiches ist. Für jedes $y \in M$ gibt es *genau* ein $x \in D$, welches die Gleichung $f(x) = y$ löst.

Bemerkung 4.5.

- Wendet man auf beiden Seiten einer Gleichung eine Funktion an, bleibt die Gleichheit erhalten. Es muss lediglich darauf geachtet werden, dass beide Seiten im Definitionsbereich der Funktion liegen. Wendet man auf beiden Seiten einer Gleichung eine injektive Funktion an, ist dies sogar eine äquivalente Umformung.

- Obige Eigenschaften bleiben bei der Verknüpfung von Funktionen erhalten, d.h. die Verknüpfung injektiver Funktionen ist wieder injektiv, die Verknüpfung surjektiver Funktionen ist wieder surjektiv und die Verknüpfung bijektiver Funktionen ist wieder bijektiv.

Definition 4.6. Sei D eine beliebige, nichtleere Menge. Die Abbildung $\mathrm{id}_D : D \to D$, $\mathrm{id}_D(x) := x$ wird als *Identitätsabbildung* bezeichnet.

Lemma 4.7. *Eine Funktion $f : D \to M$ ist*

(a) injektiv genau dann, wenn für jedes $y \in M$ gilt: $f^{-1}(\{y\})$ enthält höchstens ein Element.

(b) surjektiv genau dann, wenn $f(D) = M$ gilt.

(c) bijektiv genau dann, wenn eine Funktion $g : M \to D$ existiert mit der Eigenschaft, dass $f \circ g = \mathrm{id}_M$ und $g \circ f = \mathrm{id}_D$ gilt. Die Funktion g wird Umkehrfunktion *von f genannt, und mit f^{-1} bezeichnet.*

Bemerkung 4.8. Beachten Sie, dass das Symbol f^{-1} zwei Funktionen hat: In Definition 4.1 haben wir $f^{-1}(J)$ definiert, wobei J eine *Menge* ist. Hierbei handelt es sich um die *Urbildfunktion*, welche Mengen auf Mengen abbildet.

In Lemma 4.7 wurde ausschließlich für bijektive Funktionen $f : D \to M$ die *Umkehrfunktion* $f^{-1} : M \to D$ definiert. Der Unterschied ist: Die Urbildfunktion erwartet