

3) Für alle $k \in K$ und $\vec{u} \in U$ ist auch $k \cdot \vec{u} \in U$, denn wenn $\vec{u} \in U$ dann gibt es $k_1, \dots, k_n \in K$ mit

$$\vec{u} = k_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + k_n \cdot \vec{v}_n$$

Dann aber gilt auch:

$$\begin{aligned} k \cdot \vec{v} &= k \cdot (k_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + k_n \cdot \vec{v}_n) \\ &= (k \cdot k_1) \cdot \vec{v}_1 + \dots + (k \cdot k_n) \cdot \vec{v}_n \end{aligned}$$

Da aber alle $k \cdot k_i \in K$ sind, ist $k \cdot \vec{u} \in U$.

Beispiel 35 In der Schule werden Geraden und Ebenen in $\mathbb{R}^3$ betrachtet. Geraden und Ebenen sind Unterräume, *sofern* sie durch den Ursprung verlaufen (andernfalls enthalten sie nicht den Nullvektor), d. h. Ursprungsgeraden und -ebenen

$$\begin{aligned} g: \vec{x} &= t \cdot \vec{v} & \text{bzw.} \\ E: \vec{x} &= s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

sind also nicht anderes als die lineare Hüllen der Richtungsvektoren $\vec{v}$ bzw. $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

2.2 Lineare Unabhängigkeit

Definition 30 (Lineare Unabhängigkeit) Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Weiterhin sei $A = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq V$ eine Menge von n Vektoren aus V . Die Menge A bzw. die Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ heißen *linear unabhängig*, wenn sich der Nullvektor nur so als Linearkombination von A

$$\vec{0} = k_1 \cdot \vec{v}_1 + k_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + k_n \cdot \vec{v}_n$$

darstellen lässt, dass $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ ist. Andernfalls heißen A bzw. $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ *linear abhängig*. Wenn $A \subseteq V$ unendlich ist, dann heißt A genau dann linear unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge von A linear unabhängig ist.

Beispiel 36 Für den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben durch:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Ist A linear abhängig oder unabhängig? A ist genau dann linear unabhängig, wenn das folgende Gleichungssystem genau eine Lösung hat, nämlich $x = y = z = 0$:

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ -2x + y - 5z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Die Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems (LGS) kann man beispielsweise mit dem Gaußalgorithmus berechnen. Der Gaußalgorithmus führt auf das folgende Ergebnis:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

An der Nullzeile erkennt man: Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, d. h. A ist nicht linear unabhängig. Wenn man die Lösungsmenge genau angeben möchte (was nicht nötig ist), so sieht man an der zweiten Zeile, dass $y = -z$ ist, und an der ersten, dass $x = -4y$ ist; daher ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(4z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ bzw. $\mathbb{L}$ ist die lineare Hülle des Vektors

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.3 Basis und Dimension

Definition 31 (Basis) Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Weiterhin sei $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\} \subseteq V$. Man nennt B eine *Basis* von V , wenn B die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- 1) Es ist $\langle B \rangle = V$, d. h. die lineare Hülle von B ist V , d. h. jeder Vektor aus V kann als Linearkombination von B dargestellt werden.
- 2) B ist linear unabhängig.

Satz 31 (Eindeutige Darstellung eines Vektors) Ist B eine Basis von V , so lässt sich jeder Vektor aus V eindeutig als Linearkombination von B darstellen.

BEWEIS Da sich jeder Vektor von V nach Definition als Linearkombination von B darstellen lässt, ist nur noch zu zeigen, dass diese Darstellung eindeutig ist. Man nehme an, ein $\vec{v} \in V$ habe zwei verschiedene Darstellungen bezüglich B :

$$\vec{v} = k_1 \cdot \vec{b}_1 + \dots + k_n \cdot \vec{b}_n$$