Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$\widetilde{g}: D' \to \mathbb{R}, \quad \widetilde{g}(x) \;=\; \begin{cases} \frac{g(x)-g(b)}{x-b} & x \neq b \\ g'(b) & x = b. \end{cases}$$

Da g in b differenzierbar ist, ist $\widetilde{g}$ auf ganz D' stetig. Nun betrachten wir den Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned} \frac{g\big(f(a+h)\big)-g\big(f(a)\big)}{h} \;&=\; \frac{g\big(f(a+h)\big)-g\big(f(a)\big)}{f(a+h)-f(a)} \cdot \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ = \frac{g\big(f(a+h)\big)-g\big(b\big)}{f(a+h)-b} \cdot \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \;&=\; \widetilde{g}\big(f(a+h)\big) \cdot \frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \end{aligned}$$

Als zweiten Faktor erkennen wir den Differenzenquotienten von f im Punkt a, dieser konvergiert gegen $f'(a)$ für $h \to 0$. Für den Faktor $\widetilde{g}(f(a+h))$ nutzen wir, dass $\widetilde{g}$ und f stetig sind, somit gilt

$$\widetilde{g}\big(f(a+h)\big) \to \widetilde{g}\big(f(a)\big) = g'(b) \quad \text{für } h \to 0.$$

Insgesamt haben wir also gezeigt, dass für $h \to 0$ gilt:

$$\frac{g\big(f(a+h)\big)-g\big(f(a)\big)}{h} \;\to\; g'(b) \cdot f(a) \;=\; g'\big(f(a)\big) \cdot f'(a)$$

□

Proposition 7.23 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** *Seien $D, D' \subset \mathbb{R}$ Intervalle und sei $f: D \to D'$ streng monoton wachsend (bzw. fallend), stetig und bijektiv mit Umkehrfunktion $g = f^{-1}: D' \to D$. Ist f in $a \in D$ differenzierbar mit $f'(a) \neq 0$, so ist g in $b := f(a)$ differenzierbar, und es gilt:*

$$g'(b) \;=\; \frac{1}{f'(a)} \;=\; \frac{1}{f'\big(g(b)\big)}$$

Man kann diese Formel mit der Kettenregel motivieren: Da $f(g(b)) = b$ für alle $b \in D'$ gilt, ist einerseits $(f \circ g)'(b) = 1$, andererseits nach Kettenregel auch: $(f \circ g)'(b) = f'\big(g(b)\big)g'(b)$, woraus durch Umstellen die Formel folgt. Allerdings wird in obiger Proposition zusätzlich gezeigt, dass g überhaupt differenzierbar ist; was bei obiger Argumentation vorausgesetzt werden müsste. Darum geben wir einen unabhängigen Beweis.

Beweis. Setze $t := g(x)$ und nutze $g(b) = a$ sowie $x = f(t)$ und $b = f(a)$, um den Differenzenquotienten umzuformen:

$$\frac{g(x)-g(b)}{x-b} \;=\; \frac{t-a}{f(t)-f(a)} \;=\; \frac{1}{\frac{f(t)-f(a)}{t-a}} \;\to\; \frac{1}{f'(a)}$$

für $x \to b$, denn aufgrund der Stetigkeit von g, die wir bereits früher bewiesen haben, gilt mit $x \to b$ auch $t = g(x) \to g(b) = a$, und somit könenn wir auf der rechten Seite den Grenzwert für $t \to a$ betrachten. $\square$

Beispiele: Ableitung $\exp(x^2)$, $\ln(x)$, allgemeine Exponential- und Logarithmusfunktion, arccos, arcsin, arctan

7.3 Mittelwertsatz und Anwendungen

In diesem Abschnitt werden wir sehen, wie sich Funktionseigenschaften wie Monotonie, Minima und Maxima aus den Ableitungsfunktionen herleiten lassen. Außerdem präzisieren wir die Idee der linearen Approximation. Grundlage hierfür ist jeweils der *Mittelwertsatz*, den wir zu Beginn dieses Abschnittes mit Hilfe zweier vorbereitender Resultate (Notwendiges Kriterium für Extremstellen, Satz von Rolle) beweisen wollen.

Proposition 7.24 (Notwendiges Kriterium für Extremstellen)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $c \in (a,b)$ so, dass f in c ein lokales Maximum oder Minimum hat. Ist f in c differenzierbar, so gilt $f'(c) = 0$.*

Beweis. Wir führen den Beweis im Falle, dass in c ein Maximum vorliegt. Dann existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $f(x) \leq f(c)$ für alle $x \in (c-\epsilon, c+\epsilon)$. Insbesondere gilt (aufgrund der Vorzeichen des Nenners!)

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \quad \text{für } x \in (c-\epsilon, c) \text{ und } \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \quad \text{für } x \in (c, c+\epsilon).$$

Ist f in c differenzierbar, so müssen links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten in c übereinstimmen; die erste Eigenschaft liefert $f'(c) \geq 0$, die zweite $f'(c) \leq 0$, zusammen muss also $f'(c) = 0$ gelten. $\square$

Proposition 7.25. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b), und es gelte $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $c \in (a,b)$ mit $f'(c) = 0$.*

Beweis. Als differenzierbare Funktion ist f stetig. Nach dem Extremalsatz 6.35 muss f somit auf $[a,b]$ Minimum und Maximum annehmen. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden: f nimmt sowohl Minimum als auch Maximum in den Randpunkten a, b an. Da $f(a) = f(b)$ gilt, muss f dann bereits auf ganz $[a,b]$ konstant sein; somit ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

Im anderen Fall gibt es ein $c \in (a,b)$, in welchem das Minimum (oder das Maximum) angenommen wird. Nach Proposition 7.24 folgt dann $f'(c) = 0$. $\square$