Lösung. Der Differenzenquotient ist

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h,$$

also folgt

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 + h = 2.$$

Wir haben also zunächst den Differenzenquotienten umgeformt, und dann mit den Rechenregeln für Grenzwerte den Grenzwert bestimmt. $\square$

Beispiel 7.5. Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ in 0 differenzierbar?

Lösung. Für den Differenzenquotienten gilt

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} -1 & \text{für } h < 0 \\ 1 & \text{für } h > 0 \end{cases},$$

also existiert der Grenzwert für $h \rightarrow 0$ nicht, die Funktion ist also in 0 nicht differenzierbar. Hingegen existieren links- und rechtsseitige Ableitung, diese haben den Wert -1 bzw. 1. $\square$

Schauen wir nochmal auf Abbildung 11, so können wir uns auch vorstellen, dass der Kurvenverlauf ab x durch eine Gerade mit der entsprechenden Steigung *angenähert* wird. Wir sprechen von *linearer Approximation*.

Nach Definition der Ableitung ist nämlich für x nahe bei a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \approx f'(a), \quad \text{d.h. } f(x) - f(a) \approx f'(a)(x - a).$$

(Im Mittelwertsatz (s.u.) werden wir eine ähnliche Formel für $f(x) - f(a)$ sehen, in der sogar Gleichheit gilt).

Definition 7.6. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $a \in D$. Die *Tangente* von f in a ist definiert als lineare Funktion mit Steigung $f'(a)$ durch den Punkt $(a, f(a))$, d.h. die Funktion

$$T_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad T_1(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Bemerkung 7.7. Die Differenzierbarkeit von f in a kann also so interpretiert werden, dass f nahe bei a durch seine Tangente in a ersetzt werden kann, ohne dass dies für die Berechnung der Werte einen großen Unterschied macht. Lineare Approximation ist an vielen Stellen hilfreich!

Beispiel 7.8. Berechnen Sie $\sqrt{4.01}$ durch lineare Approximation.

Lösung. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ und wollen den Funktionswert im Punkt $x = 4.01$ durch lineare Approximation im Punkt $a = 4$ bestimmen (denn $\sqrt{4} = 2$ wissen wir!), also gemäß der Formel

$$f(4.01) \approx f'(4)(4.01 - 4) + f(4) = 0.01 \cdot f'(4) + 2$$

Dazu müssen wir noch $f'(4)$ bestimmen. Dazu erweitern wir den Differenzenquotienten, um die 3. binomische Formel anwenden zu können, wie folgt:

$$\frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} = \frac{(\sqrt{4+h} - \sqrt{4})(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})}{h(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})} = \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})}$$

Nun können wir h kürzen und erhalten

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})} = \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{4}} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

Somit erhalten wir als Näherungswert

$$f(4.01) \approx f'(4)(4.01 - 4) + f(4) = 0.01 \cdot 0.25 + 2 = 2.025$$

□

Proposition 7.9. (*) Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in D$. Die Funktion f ist genau dann in a differenzierbar, wenn es eine in a stetige Funktion $\tilde{f} : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x) = (x-a)\tilde{f}(x) + f(a)$. In diesem Fall gilt dann $f'(a) = \tilde{f}(a)$.

Beweis. (*) Für $x \neq a$ sieht man durch Auflösen der Gleichung, dass $\hat{f}(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. $\tilde{f}$ kann genau dann zu einer in a stetigen Funktion erweitert werden, wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} \tilde{f}$ in $\mathbb{R}$ existiert, dies entspricht aber genau dem Grenzwert, der auch in der Definition der Ableitung betrachtet wird, wenn dieser existiert, gilt also $\tilde{f}(a) = f'(a)$. □

Definition 7.10. Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, die in jedem Punkt $a \in D$ differenzierbar ist. Dann heißt f *differenzierbar*, und die Abbildung $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ heißt *Ableitungsfunktion*.

Falls die entsprechenden Funktionen wieder differenzierbar sind, setzen wir $f'' = (f')'$, $f''' = (f'')'$ usw. Diese Funktionen werden als zweite, dritte, ... Ableitungsfunktion von f bezeichnet, f heißt dann zweimal, dreimal, ... differenzierbar. Man schreibt auch $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$ usw.

Bemerkung 7.11. • In unserem Eingangsbeispiel würde die f' für jeden Punkt die „punktgenau berechnete“ Steigung angeben.

- Die zweite Ableitung f'' gibt für jeden Punkt an, wie stark sich die Steigung dort verändert. Dies wird auch als *Krümmungsverhalten* der Funktion bezeichnet.

- Wir werden bald sehen: ist $f'' = 0$, so bedeutet dies: keine Änderung in der Steigung, f' ist dann konstant. Die einzigen Funktionen mit konstanter Steigung sind Geraden. Umgekehrt bedeutet $f'' \neq 0$ eine Änderung im Steigungsverhalten, dann kann die Funktion selbst keine Gerade darstellen. Dies erklärt insbesondere den Begriff Krümmungsverhalten.

Definition 7.12. Sei D ein Intervall und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann wird

$$T_2(x) := f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

als *quadratische Approximation* von f im Punkt a bezeichnet.

Bemerkung 7.13. Der Faktor $\frac{1}{2}$ vor der zweiten Ableitung erklärt sich, wenn wir Ableitungsregeln besprochen haben. Er ist so gewählt, dass T, T', T'' mit f, f', f'' im Punkt a übereinstimmen.

Beispiel 7.14. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktionen $f', f'', \dots$ für:

$$(a) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1, \quad (b) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x.$$

Lösung. Wir werden sehen, dass die Lösung zu (a) in der Lösung zu (b) enthalten ist.

Wir betrachten den Differenzenquotienten zu $f(x) = x$ in einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1,$$

insbesondere gilt also $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 1$ in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$, also $f'(a) = 1$.

Zur Bestimmung von f'' betrachten wir wieder den Differenzenquotienten von $g(x) := 1$ in einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$:

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{1 - 1}{x - a} = 0,$$

es folgt $f''(a) = g'(a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Analog sieht man, dass die Ableitungsfunktion einer beliebigen konstanten Funktion $g(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$) ebenfalls Null ist, insbesondere sind dann alle höheren Ableitungen $f'', f^{(3)}, \dots$ konstant gleich Null. $\square$

Proposition 7.15. Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar im Punkt $a \in D$, so ist f auch stetig in a .

Beweis. Aufgrund der Differenzierbarkeit von f in a gilt

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \rightarrow f'(a) \cdot 0$$

für $x \rightarrow a$, also gilt $f(x) \rightarrow f(a)$ für $x \rightarrow a$. $\square$

7.2 Rechenregeln für Ableitungen

Proposition 7.16. Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, die in $a \in D$ differenzierbar sind. Dann gilt:

(a) Für $c \in \mathbb{R}$ ist cf in a differenzierbar und $(cf)'(a) = cf'(a)$.

(b) $f + g$ ist in a differenzierbar und $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

(c) Produktregel: fg ist in a differenzierbar und

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

(d) Quotientenregel: Ist $g(a) \neq 0$ und a Häufungspunkt des Definitionsbereiches von $\frac{f}{g}$, so ist $\frac{f}{g}$ in a differenzierbar, und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

Beweis. (a) - (c) sind **Hausaufgabe**. (d) lässt sich auf die Produktregel zurückführen (**Hausaufgabe**), wenn wir folgendes gezeigt haben: Unter den genannten Voraussetzungen ist $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$. Um dies zu zeigen, formen wir den entsprechenden Differenzenquotienten wie folgt um

$$\frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} = \frac{\frac{g(a)}{g(a+h)g(a)} - \frac{g(a+h)}{g(a)g(a+h)}}{h} = \frac{1}{g(a+h)g(a)} \frac{g(a) - g(a+h)}{h}$$

Für $h \rightarrow 0$ gilt nun $g(a+h) \rightarrow g(a)$, da g insbesondere stetig in a ist; außerdem konvergiert der zweite Faktor gerade gegen $-g'(a)$. Dies zeigt die Behauptung. $\square$

Mit der Wahl $g(x) = x$ haben wir insbesondere folgendes gezeigt:

Beispiel 7.17. Die Hyperbelfunktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) = \frac{1}{x}$ ist differenzierbar und $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Mit der Produktregel erhalten wir weiterhin Ableitungsregeln für Polynome sowie allgemeiner für Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten.

Beispiel 7.18. Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$, wobei D der größtmögliche Definitionsbereich sei. f ist auf ganz D differenzierbar und $f'(x) = nx^{n-1}$.

Lösung. Für $n \in \mathbb{N}$ ist dies **Hausaufgabe**. Für negative Exponenten zeigen wir dies per Induktion; wir betrachten also die Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^n}$ für $n \in \mathbb{N}$, und müssen zeigen,

dass $f'(x) = (-n)\frac{1}{x^{n+1}}$ gilt (man vergewissere sich, dass dies der behaupteten Aussage für negative Exponenten entspricht).

Induktionsanfang: Für $n = 1$ haben wir bereits gesehen, dass die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x}$ durch $f'(x) = (-1)\frac{1}{x^2}$ gegeben ist.

Induktionsvoraussetzung: Für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ sei bekannt, dass die Ableitung von $g(x) = \frac{1}{x^n}$ durch $g'(x) = (-n)\frac{1}{x^{n+1}}$ gegeben ist.

Induktionsschluss: Wir bestimmen nun die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x^{n+1}}$ mit Hilfe der Produktregel, in dem wir $f(x) = \frac{1}{x} \frac{1}{x^n}$ schreiben, die Ableitungen beider Faktoren sind bekannt, und es folgt

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x} \cdot (-n)\frac{1}{x^{n+1}} = -(n+1)\frac{1}{x^{n+2}}.$$

□

Proposition 7.19. *Ableitung der elementaren Funktionstypen.*

(a) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ eine Polynomfunktion mit $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$, so ist f differenzierbar und $f'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + 2a_2 x + a_1$.

(b) Ist f eine rationale Funktion mit maximalem Definitionsbereich D , so ist f auf ganz D differenzierbar, f' berechnet sich aus (a) mit Anwendung der Quotientenregel; insbesondere ist f' wieder eine rationale Funktion.

(c) Ist $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihenfunktion, so ist f auf ganz $(-r, r)$ differenzierbar, und f' ist ebenfalls eine Potenzreihenfunktion:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

Beweis. Der Beweis von (a) ist **Hausaufgabe**; (b) ist eine direkte Anwendung der Quotientenregel.

Beweis von (c): (*) **Zusatzmaterial, wird später ergänzt**

□

Lemma 7.20. (*) Die Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

haben den gleichen Potenzradius.

Beweis. (*) **Zusatzmaterial.** Man kann (als Teilargument) prüfen, dass die Formel von Hadamard für beide Potenzreihen den gleichen Potenzradius ergibt. □

Beispiel 7.21. Man zeige:

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$ ist differenzierbar und $f'(x) = \exp(x)$.

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$ ist differenzierbar und $f'(x) = \cos(x)$.

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$ ist differenzierbar und $f'(x) = -\sin(x)$.

Beweis. Dies lässt sich jeweils aus den Potenzreihendarstellungen und der entsprechende Ableitungsregel folgern.

Ohne Verwendung der Potenzreihendarstellung ist ein Beweis mittels der Funktionalgleichung von $\exp$ bzw. mittels der Additionstheoreme möglich, diesen zeigen wir hier.

(a) Wir betrachten den Differenzenquotienten in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \frac{\exp(x)\exp(h) - \exp(x)}{h} = \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h}$$

Im ersten Schritt haben wir die Funktionalgleichung von $\exp$ angewendet. Der zweite Faktor auf der rechten Seite entspricht gerade dem Differenzenquotienten im Punkt $x=1$!. Dessen Grenzwert haben wir in Beispiel 6.21 bereits als 1 bestimmt, es folgt

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \rightarrow \exp(x) \cdot 1 \quad \text{für } h \rightarrow 0,$$

also ist $f'(x) = 1$.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $h \neq 0$, dann können wir den Differenzenquotienten durch Anwenden des Additionstheorems für den Sinus umformen:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\ &= \sin(x)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} \end{aligned}$$

Die beiden Quotienten, in denen h auftritt, haben wir bereits in Beispiel 6.22 analysiert, es gilt $\frac{\sin(h)}{h} \rightarrow 1$ und

$$\frac{\cos(h) - 1}{h} = h \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h^2} \rightarrow 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

für $h \rightarrow 0$. Zusammen gilt also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 = \cos(x)$$

□

Proposition 7.22 (Kettenregel). *Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : D' \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset D'$. Sei f in $a \in D$ differenzierbar und g in $b := f(a)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ in a differenzierbar und es gilt:*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Merkregel: Innere Ableitung (d.h. f') multipliziert mit äußerer Ableitung (d.h. g' , ausgewertet im Punkt $b = f(a)$.)