Ist A linear abhängig oder unabhängig? A ist genau dann linear unabhängig, wenn das folgende Gleichungssystem genau eine Lösung hat, nämlich $x = y = z = 0$:

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +3y & -z & = & 0 \\ -2x & +y & -5z & = & 0 \\ & -2y & +2z & = & 0 \end{array} \right.$$

Die Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems (LGS) kann man beispielsweise mit dem Gaußalgorithmus berechnen. Der Gaußalgorithmus führt auf das folgende Ergebnis:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

An der Nullzeile erkennt man: Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, d. h. A ist nicht linear unabhängig. Wenn man die Lösungsmenge genau angeben möchte (was nicht nötig ist), so sieht man an der zweiten Zeile, dass $y = -z$ ist, und an der ersten, dass $x = -4y$ ist; daher ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(4z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ bzw. $\mathbb{L}$ ist die lineare Hülle des Vektors

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.3 Basis und Dimension

Definition 31 (Basis) Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Weiterhin sei $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\} \subseteq V$. Man nennt B eine *Basis* von V, wenn B die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

1) Es ist $\langle B \rangle = V$, d. h. die lineare Hülle von B ist V, d. h. jeder Vektor aus V kann als Linearkombination von B dargestellt werden.
2) B ist linear unabhängig.

Satz 31 (Eindeutige Darstellung eines Vektors) *Ist B eine Basis von V, so lässt sich jeder Vektor aus V* eindeutig *als Linearkombination von B darstellen.*

BEWEIS Da sich jeder Vektor von V nach Definition als Linearkombination von B darstellen lässt, ist nur noch zu zeigen, dass diese Darstellung eindeutig ist. Man nehme an, ein $\vec{v} \in V$ habe zwei verschiedene Darstellungen bezüglich B:

$$\vec{v} \;=\; k_1 \cdot \vec{b}_1 + \ldots + k_n \cdot \vec{b}_n$$

$$\vec{v} \;=\; l_1 \cdot \vec{b}_1 + \ldots + l_n \cdot \vec{b}_n$$

Dann gilt:

$$\vec{0} \;=\; \vec{v} - \vec{v} = (k_1 - l_1) \cdot \vec{b}_1 + \ldots + (k_n - l_n) \cdot \vec{b}_n$$

Da aber B linear unabhängig ist, lässt sich der Nullvektor nur so als Linearkombination von B darstellen, dass alle Koeffizienten gleich Null sind, d. h. es gilt $0 = k_1 - l_1 = \ldots = k_n - l_n$. Daraus folgt $k_1 = l_1, \ldots, k_n = l_n$, d. h. die beiden Darstellungen von $\vec{v}$ sind – im Widerspruch zur Annahme – nicht voneinander verschieden.

Beispiel 37 Für den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Darstellung von $\vec{v}$ führt auf das folgende LGS:

$$x \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcr} -x & +3y & 3z & = & -2 \\ 2x & -y & +z & = & 6 \\ x & +2y & +2z & = & 2 \end{array} \right.$$

Die Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems (LGS) kann man beispielsweise mit dem Gaußalgorithmus berechnen. Der Gaußalgorithmus führt auf das folgende Ergebnis:

$$\begin{array}{rrrcr} -1 & 3 & 3 & | & -2 \\ 2 & -1 & 1 & | & 6 \\ 1 & 2 & 2 & | & 2 \end{array} \;\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow\; \begin{array}{rrrcr} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{array}$$

Also lässt sich $\vec{v}$ eindeutig als Linearkombination von B darstellen, nämlich als $\vec{v} = 2 \cdot \vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3$, d. h. die Lösung des LGS ($x = 2$, $y = -1$ und $z = 1$) liefert die Koeffizienten der Linearkombination. Der zugehörige Koeffizientenvektor ist

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Satz 32 (Existenzen von Basen) *Jeder Vektorraum hat eine Basis.*

BEWEIS Für unendliche Basen bedarf der Beweis tiefere Einsichten in die Mengenlehre. Daher wird er hier nur für endliche Basen geführt. Der Beweis ist konstruktiv, d. h.

er ist zugleich ein Verfahren, wie man zu einem vorgegebenen Vektorraum, der eine endliche Basis hat, eine endliche Basis konstruieren kann.

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Falls $V = \{\vec{0}\}$ ist, so ist $B = \{\vec{0}\}$ eine Basis. Fall $V \neq \{\vec{0}\}$ ist, so wähle man ein $\vec{b}_1 \in V$ mit $\vec{b}_1 \neq \vec{0}$. Ist $\langle \vec{b}_1 \rangle = V$, so ist $B_1 = \{\vec{b}_1\}$, falls nicht, so gibt es ein $\vec{b}_2 \in V$ mit $\vec{b}_2 \notin \langle \vec{b}_1 \rangle$. Insbesondere sind dann $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ linear unabhängig. Falls $\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle = V$ ist, so ist $B_2 = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ eine Basis von V. Falls nicht, so wiederholt man den vorangegangenen Schritt so lange, bis man eine linear unabhängige Menge $B_n = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ gefunden hat mit $\langle B_n \rangle = V$. Dann ist B_n eine Basis von V.

Satz 33 (Basisaustauschsatz) *Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Weiterhin seien $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\} \subseteq V$ und $C = \{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_m\} \subseteq V$ Basen von V. Dann gibt es zu jedem $\vec{b}_i$ ein $\vec{c}_j$, sodass $B^* = B \setminus \{\vec{b}_i\} \cup \{\vec{c}_j\} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{i-1}, \vec{c}_j, \vec{b}_{i+1}, \ldots, \vec{b}_n\}$ eine Basis von V ist, d. h. man findet zu jedem Vektor $\vec{b}_i$ der einen Basis einen geeigneten Vektor $\vec{c}_j$ der anderen Basis, sodass man $\vec{b}_i$ durch $\vec{c}_j$ ersetzen kann und B^* nach der Ersetzung ebenfalls eine Basis ist.*

BEWEIS Es seien $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\} \subseteq V$ und $C = \{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_m\} \subseteq V$ zwei Basen von V und es sei i mit $1 \leq i \leq n$. Dann gibt es ein j mit $1 \leq j \leq m$, sodass $c_j \notin \langle \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{i-1}, \vec{b}_{i+1}, \ldots, \vec{b}_n \rangle$ ist. Denn andernfalls wäre

$$V = \langle \vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_m \rangle \subset \langle \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{i-1}, \vec{b}_{i+1}, \ldots, \vec{b}_n \rangle \neq V,$$

was nicht sein kann, da $\langle \vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_m \rangle = V$ ist und $\vec{b}_i$ wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren keine Linearkombination von

$$\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{i-1}, \vec{b}_{i+1}, \ldots, \vec{b}_n\},$$

also $\langle \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{i-1}, \vec{b}_{i+1}, \ldots, \vec{b}_n \rangle \neq V$ ist. Für $\vec{c}_j$ ist

$$\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{i-1}, \vec{c}_j, \vec{b}_{i+1}, \ldots, \vec{b}_n\}$$

linear unabhängig, denn aus

$$\vec{0} = k_1 \cdot \vec{b}_1 + \ldots + k_{i-1} \cdot \vec{b}_{i-1} + k \cdot \vec{c}_j + k_{i+1} \cdot \vec{b}_{i+1} + \ldots + k_n \cdot \vec{b}_n\}$$

folgt $k = 0$, da $\vec{c}_j$ nicht in $\langle \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{i-1}, \vec{b}_{i+1}, \ldots, \vec{b}_n \rangle$ liegt. Da $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{i-1}, \vec{b}_{i+1}, \ldots, \vec{b}_n\}$ linear abhängig ist, folgt weiterhin $k_1 = \ldots = k_{i-1} = k_{i+1} = \ldots = k_n = 0$. Wenn man $\vec{b}_i$ hinzufügt, erhält man, dass

$$\langle \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{i-1}, \vec{c}_j, \vec{b}_{i+1}, \ldots, \vec{b}_n, \vec{b}_i \rangle = V$$

ist, da B eine Basis von V ist. Nach dem Existenzsatz von Basen und dem konstruktionsprinzip in seinem Beweis ist dann aber bereits

$$\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{i-1}, \vec{c}_j, \vec{b}_{i+1}, \ldots, \vec{b}_n\}$$

eine Basis von V, da $\vec{c}_j$ keine Linearkombination von B ist und daher

$$\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{i-1}, \vec{c}_j, \vec{b}_{i+1}, \ldots, \vec{b}_n, \vec{b}_i\}$$

linear abhängig ist.

2.4 Dimension eines Vektorraumes

Bemerkung 13 Der vorangegangene Satz heißt (in dieser oder einer ähnlichen Formulierung) „Austauschsatz von Steinitz". Seine wichtigste Konsequenz ist der folgende Satz. Dieser erlaubt es, den Begriff der Dimension eines Vektorraumes zu definieren.

Satz 34 (Kardinalität von Basen) *Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Sind B_1 und B_2 Basen von V, so gilt $|B_1| = |B_2|$, d. h. alle Basen eines Vektorraums sind zueinander gleichmächtig.*

BEWEIS Man nehme an, B_1 und B_2 seien Basen von V mit $|B_1| = n$ und $|B_2| = m$ und $n \neq m$. Ohne Beschränkung des Allgemeingültigkeit sei $n < m$. Dann kann man nach dem Basisaustuschsatz jeden Vektor von B_2 durch einen von B_1 austauschen. Da aber $n < m$ ist, wird mindestens ein Vektor von B_1 mehrfach in B_2 ausgetauscht und B_2 wäre nicht mehr linear unabhängig, d. h. keine Basis von V. Also ist $n = m$.

Definition 32 Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und B sei eine Basis von V. Dann ist die Dimension von V über K definiert als $dim_K(V) = |B|$, d. h. die Dimension ist die Anzahl der Basisvektoren einer beliebigen Basis bzw. ∞, falls die Basis B (und damit jede andere Basis) unendliche viele Elemente enthält.

Definition 33 (Standardnormalbasis) Für $\mathbb{R}^3$ ist

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

die sogenannte *Standardnormalbasis*. Analog kann man die Standardnormalbasis für die reellen Vektorröume $\mathbb{R}^n$ für beliebige Dimensionen n definieren. Die Basisvektoren entsprichen den Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems.

Bemerkung 14 Wählt man für die reellen Vektorräume $\mathbb{R}^n$ die Standardnormalbasis als Basis, so stimmen die Komponenten eines Vektors mit seinen Koeffizienten überein, d. h. auch der Vektor und sein Koeffizientenvektor sind identisch.

Beispiel 38 $\mathbb{R}^n$ hat auch andere Basen als die Standardnormalbasis, nämlich jede linear unabhängige Menge von drei Vektoren ist eine Basis von $\mathbb{R}^n$, z. B. ist für $\mathbb{R}^3$ die folgende Menge eine Basis:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Das haben wir in Beispiel 37 festgestellt. Dagegen ist

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

keine Basis, wie aus Beispiel 36 hervorgeht. Analog verhält es sich allgemein mit $\mathbb{R}^n$.

2.5 Skalarprodukt, Länge, Winkel und Vektorprodukt

Definition 34 (Skalarprodukt) Es sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\cdot : V \times V \to \mathbb{R} : (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} \cdot \vec{y}$ ist ein *Skalarprodukt* auf V, wenn $\cdot$ für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ und $k \in \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

a) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ (Symmetrie bzw. Kommutativität)
b) Bilinearität:
   1) $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$
   2) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$
   3) $(k \cdot \vec{x}) \cdot \vec{y} = k \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y})$
   4) $\vec{x} \cdot (k \cdot \vec{y}) = k \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y})$
c) $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$ (positive Definitheit)
d) $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

Definition 35 (Standardskalarprodukt) Für die reellen Vektorräume $\mathbb{R}^n$ ist das *Standardskalarprodukt* folgendermaßen definiert:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = x_1 \cdot y_1 + \ldots + x_n \cdot y_n$$

Satz 35 *Das Standardskalarprodukt ist ein Skalarprodukt.*

Beweis Übung.