$$s_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$s_3 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hieran erkennt man zweierlei:

1) Der Isomorphismus nach $Sym(n)$ ist nicht eindeutig. Man hätte die Gruppenelemente auch anders durchnummieren können, d. h. es gibt u. U. mehrere zu einer Gruppe G mit $|G| = n$ isomorphe Untergruppen in $Sym(n)$.
2) Wenn $|G| = n$ ist, dann gibt es u. U. auch in kleineren Permutationsgruppen $Sym(k)$ mit $k < n$ isomorphe Untergruppen zu G. Das wurde oben anhand der Gruppe K der Deckabbildungen des gleichseitigen Dreiecks ersichtlich: Es ist $|K| = 6$, aber K ist isomorph zu $Sym(3)$.

Bemerkung 5 Der Satz von Caley sagt aus: Wenn man endliche Gruppen untersuchen möchte, braucht man sich nur mit Permutationsgruppen zu beschäftigen, da alle endlichen Gruppen isomorph zu einer (in der Regel mehreren) Permutationsgruppe(n) sind.

1.2.5 Normalteiler und Faktorgruppen

Definition 16 Es sei $N \leq G$ eine Untergruppe der Gruppe $(G, \circ)$. Dann ist N ein *Normalteiler* von G (in Zeichen $N \trianglelefteq G$), wenn $gN = Ng$ für alle $g \in G$ gilt, d. h. wenn alle Links- und Rechtsnebenklassen von N identisch sind.

Beispiel 13 In Beispiel 10 kann man für die Untergruppe der Deckdrehungen $D = \{d_0, d_{120}, d_{240}\}$ erkennen, dass $s_1 D = \{s_1, s_2, s_3\} = Ds_1$ gilt. Links- und Rechtsnebenklasse bezüglich s_1 sind also identisch. Dasselbe gilt auch für die anderen Spiegelungen, d. h. es ist $s_i D = \{s_1, s_2, s_3\} = Ds_i$ für alle $1 \leq i \leq 3$. Für Elemente d_i aus D ergibt sich als Nebenklasse $d_i D = Dd_i = D$. Also sind Links- und Rechtsnebenklassen zu D stets identisch, d. h. D ist ein Normalteiler der Gruppe der Deckabbildungen des gleichseitigen Dreiecks.

Die drei Untergruppen der Spiegelungen sind keine Normalteiler, da – wie man ebenfalls in Beispiel 10 sieht – bei Ihnen Links- und Rechtsnebenklassen nicht identisch sind.

Lemma 2 *Es sei $N \leq G$ eine Untergruppe der Gruppe $(G, \circ)$.*

1) *Dann gilt $N \trianglelefteq G$ genau dann, wenn $g \circ n \circ g^{-1} \in N$ für alle $g \in G$ und alle $n \in N$ gilt.*
2) *Ist G kommutativ, so ist jede Untergruppe $N \leq G$ ein Normalteiler $N \trianglelefteq G$ von G.*
3) *Ist $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus, so ist $Kern(\varphi) \trianglelefteq G$.*

BEWEIS

1) Es sei $N \trianglelefteq G$. Dann ist $gN = Ng$ für alle $g \in G$, also $gNg^{-1} = N$, d. h. es gilt $g \circ n \circ g^{-1} \in N$ für alle $n \in N$. Umgekehrt gelte $g \circ n \circ g^{-1} \in N$ für alle $g \in G$ und alle $n \in N$. Dann gilt $gNg^{-1} \subseteq N$ und auch $g^{-1}Ng \subseteq N$ und $N \subseteq gNg^{-1}$ und $N \subseteq g^{-1}Ng$ gelten ohnehin (wie man an $g = e$ sieht), also gilt $gNg^{-1} = N$ mithin $gN \subseteq Ng$. Daher ist $N \trianglelefteq G$.
2) Es sei $N \leq G$. Da G kommutativ ist, gilt $g \circ n \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} \circ n = n \in N$ für alle $g \in G$ und alle $n \in N$. Also ist $N \trianglelefteq G$.
3) Nach Satz 7 ist $Kern(\varphi) \leq G$. Es sei $n \in Kern(\varphi)$ und $g \in G$. Dann ist $\varphi(g \circ n \circ g^{-1}) = \varphi(g) * \varphi(n) * (g^{-1}) = \varphi(g) * \varphi(n) * (g)^{-1} = \varphi(g) * e_H * (g)^{-1} = \varphi(g) * \varphi(g)^{-1} = e_H$. Also ist $\varphi(g \circ n \circ g^{-1}) \in Kern(\varphi)$ und damit ist $Kern(\varphi)$ nach 1) ein Normalteiler.

Satz 10 *Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler von G. Auf der Menge der Linksnebenklassen G/N sei die folgende Verknüpfung $*$ definiert:*

$$gN * hN := (g \circ h)N$$

Dann ist $(G/N, *)$ eine Gruppe, die sogenannte Faktorgruppe *von G nach N (oder von G modulo N). Für die Ordnung $|G/N|$ gilt $|G/N| = [G : N]$.*

BEWEIS Da N ein Normalteiler von G ist, gilt für alle $g \in G$, dass Links- und Rechtsnebenklassen identisch sind, also $gN = Ng$ gilt. Daraus folgt:

$$(g \circ N) \circ (h \circ N) = g \circ (N \circ h) \circ N = g \circ (h \circ N) \circ N = g \circ h \circ N \circ N = g \circ h \circ N = gN * hN$$

Also wird mit $*$ eine Verknüpfung auf G/N definiert, die eindeutig durch die Verknüpfung $\circ$ von G festgelegt ist. Die Assoziativität und die Abgeschlossenheit überträgt sich von $\circ$ auf $*$. Das Neutralelement von G/N ist N (da $eN = N$ und $gN * eN = (g \circ e)N = gN$ sowie $eN * gN = (e \circ g)N = gN$ gelten) und zu gN ist $g^{-1}N$ das Inverse (da $gN * g^{-1}N = g \circ g^{-1}N = eN = N$ gilt). $|G/N| = [G : N]$ gilt nach Definition.

Beispiel 14 Wie schon in 10 ersichtlich wurde, ist $D = \{d_0, d_{120}, d_{240}\}$ ein Normalteiler von K. Die beiden Nebenklassen von K/D sind $D = \{d_0, d_{120}, d_{240}\}$ selbst und $s_1D = \{s_1, s_2, s_3\}$. Die Nebenklassen K/D bilden daher eine Faktorgruppe der Ordnung $|K/D| = [K : D] = |K| : |D| = 6 : 3 = 2$. Ihre Verknüpfungstafel lautet:

$*$	U	s_1U
U	U	s_1U
s_1U	s_1U	U

Tabelle 1.9: Verknüpfungstafel der Faktorgruppe K/D