



Quadratische Gleichungen

Lösungsformel

Boris Girnat, Meeri-Liisa Beste und Bianca Wolff





Lösungsformel

Die allgemeine Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat die sogenannte abc- oder Mitternachtsformel als Lösungsformel:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die normierte Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat die sogenannte p-q-Formel als Lösungsformel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{2} - q}$$



Lösungsformel

Die allgemeine Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat die sogenannte abc- oder Mitternachtsformel als Lösungsformel:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die normierte Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat die sogenannte p-q-Formel als Lösungsformel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{2} - q}$$

-> Häufig wird in Schulbüchern nur die pq-Formel behandelt



Lösungsformel

Warum kann man tatsächlich auf die Mitternachtsformel verzichten?

- Quadratische Gleichung in die normierte Form bringen
 - pq Formel anwenden
- Problematisch ist, dass dabei Brüche und unschöne Zahlen entstehen können die bei der praktischen Anwendung zu Fehleranfälligkeiten beim Rechnen führen können
- Der Vorteil ist, dass sich Lernende nur eine Formel merken müssen und für alle Fälle anwenden können



Lösungsformel

Diskriminante

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Den Term $b^2 - 4ac$ nennt man Diskriminante D .

Wozu dient er?



Lösungsformel

Diskriminante

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Den Term $b^2 - 4ac$ nennt man Diskriminante D .

Wozu dient er?

Vom Lateinischen Wort Diskriminara = Unterscheiden

Es können drei verschiedene Fälle auftreten: positiv, negativ, gleich null:

$D < 0$ keine Lösung

$D = 0$ eine Lösung

$D > 0$ zwei Lösungen

der zugehörigen quadratischen Gleichung



Lösungsformel

Diskriminante

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{2} - q}$$

Bei der p-q-Formel: Hier ist der Term $(\frac{p}{2})^2 - q$ die Diskriminante D.

In den reellen Zahlen gilt:

D < 0 keine Lösung

D = 0 eine Lösung

D > 0 zwei Lösungen

der zugehörigen quadratischen Gleichung.



Lösungsformel

Diskriminante

Um herauszufinden, wie viele Lösungen eine quadratische Gleichung hat, muss die Gleichung nicht vollständig gelöst werden. Es reicht den Radikant der Wurzel in der Formel zu untersuchen.

Der Radikant $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ wird auch als Diskriminante D bezeichnet.

Es werden drei Fälle unterschieden:

Die Diskriminante kann **positiv**, **null** oder **negativ** sein. Entsprechend hat die Gleichung **zwei Lösungen**, **eine Lösung** oder **keine Lösung**.

$x^2 + 6x + 1 = 0$	$D = 3^2 - 1$	-> zwei Lösungen
$x^2 + 6x + 9 = 0$	$D = 3^2 - 9$	-> eine Lösung
$x^2 + 6x + 10 = 0$	$D = 3^2 - 10$	-> keine Lösung



Lösungsformel

Herleitung pq-Formel

$$x^2 + 14x + 24 = 0 \quad | -24$$

$$x^2 + 14x = -24$$

$$x^2 + 14x + \left(\frac{14}{2}\right)^2 = \left(\frac{14}{2}\right)^2 - 24$$

$$\left(x + \frac{14}{2}\right)^2 = \left(\frac{14}{2}\right)^2 - 24$$

$$x + \frac{14}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{14}{2}\right)^2 - 24} \quad | -\frac{14}{2}$$

$$x_{1,2} = -\frac{14}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{14}{2}\right)^2 - 24}$$

$$x^2 + p x + q = 0$$

$$x^2 + p x = -q$$

$$x^2 + p x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad | -\frac{p}{2}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$| -q$$

$$| + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

} quadratische Ergänzung

} Faktorisieren mit binomischer Formel



Lösungsformel

Herleitung pq-Formel

$$\begin{aligned}x^2 + 14x + 24 &= 0 && | -24 \\x^2 + 14x &= -24 \\x^2 + 14x + \left(\frac{14}{2}\right)^2 &= \left(\frac{14}{2}\right)^2 - 24 \\ \left(x + \frac{14}{2}\right)^2 &= \left(\frac{14}{2}\right)^2 - 24 \\x + \frac{14}{2} &= \pm \sqrt{\left(\frac{14}{2}\right)^2 - 24} && | -\frac{14}{2} \\x_{1,2} &= -\frac{14}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{14}{2}\right)^2 - 24}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 + p x + q &= 0 && | -q \\x^2 + p x &= -q \\x^2 + p x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q && \left. \begin{array}{l} \text{quadratische Ergänzung} \\ \text{Faktorisieren mit binomischer Formel} \end{array} \right\} \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\x + \frac{p}{2} &= \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} && | -\frac{p}{2} \\x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\end{aligned}$$

- Zahlenbeispiel und verwenden der quadratische Ergänzung
- Vorgehen schrittweise Abstrakt mit den Parametern p und q
- Für starke Klasse hat, wäre dies mal ein gutes Thema die Formel so herzuleiten/beweisen
- Meistens wird in der Unterrichtspraxis nur die Formel angeschrieben
- Quadratische Ergänzung als Zentrale Methode zum Lösen von quadratischen Gleichungen
 - Die Lösungsformeln als quadratische Ergänzung in einem Schritt



Literatur

- Barzel, B., Glade, M., Klinger, M., & GmbH, S. (2021). Algebra und Funktionen. Springer Spektrum. S. 149-186
- Weigand, H., Schüler-Meyer, A., & Pinkernell, G. (2022). Didaktik der Algebra (4., vollständig überarbeitete Auflage.). Springer Spektrum. S. 247-252; S. 290-294