Definition 3.38. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Bemerkung 3.39. Bemerkungen zum Begriff absolute Konvergenz.

- Für Reihen mit ausschließlich nichtnegativen Summanden ($a_n \geq 0$ für alle $n \geq 0$) stimmen absolute Konvergenz und Konvergenz überein.
- Die Folge der Partialsummen $\bar{s}_n := \sum_{k=0}^{n} |a_n|$ ist monoton wachsend. Um absolute Konvergenz nachzuweisen, genügt es also zu zeigen, dass die Folge $\bar{s}_n$ beschränkt ist.
- Es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergieren. Zum Beispiel kann man zeigen, dass die *alternierende harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert, wohingegen bekanntermaßen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.
- Umgekehrt folgt aus der absoluten Konvergenz aber stets die Konvergenz der Reihe, dies zeigt das nächste Lemma.

Lemma 3.40. *Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ auch konvergent.*

Beweis. Nach Voraussetzung konvergiert $\bar{s}_n := \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ gegen einen Grenzwert, nennen wir ihn $\bar{s}$. Insbesondere gilt für $r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|$, dass $r_n = \bar{s}_n - \bar{s} \to 0$ für $n \to \infty$.

Bezeichne $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ die Partialsummen der „Original"-Folge, sowie $u_n := s_n - r_n$ und $w_n := s_n + r_n$, dann bildet $[u_n, w_n]$ eine Intervallschachtelung:

- $u_{n+1} - u_n = s_{n+1} - r_{n+1} - s_n + r_n = a_{n+1} + |a_{n+1}| \geq 0$, also ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend,
- $w_{n+1} - w_n = s_{n+1} + r_{n+1} - s_n - r_n = a_{n+1} - |a_{n+1}| \leq 0$, also ist $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.
- $(w_n - u_n) = s_n + r_n - s_n + r_n = 2r_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip existiert genau ein $s \in \mathbb{R}$, dass in allen Intervallen enthalten ist. Da außerdem $s_n \in [u_n, w_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt für jedes $n \in N$:

$$|s_n - s| \leq (w_n - u_n) = 2r_n,$$

und somit $|s_n - s| \to 0$ für $n \to \infty$, also $s_n \to s$. □