IV: Die Behauptung gelte für alle Polynome vom Grad kleiner oder gleich n.

IS: $n \to n+1$. Sei p ein Polynom vom Grad $n+1$. Falls eine Nullstelle $x_1 \in K$ von $p(x)$ existiert, so erhalten wir nach Satz 4.29:

$$p(x) \;=\; s(x)(x - x_1),$$

wobei $s(x)$ ein Polynom vom Grad $(n+1) - 1 = n$ ist. Jede Nullstelle von $p(x)$, die von x_1 verschieden ist, muss nach Bemerkung 2.14 eine Nullstelle von $s(x)$ sein: Das Produkt $s(x)(x - x_1)$ kann nur gleich Null sein, wenn mindestens einer der Faktoren bereits gleich Null ist. Nach Induktionsvoraussetzung hat $s(x)$ höchstens n Nullstellen, somit kann $p(x)$ höchstens $n+1$ Nullstellen haben, nämlich x_1 sowie die Nullstellen von s. □

Definition 4.32. Eine rationale Funktion ist eine Funktion der Form

$$f : \mathbb{R} \setminus N \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

wobei p und q Polynomfunktionen sind und N die Menge der Nullstellen von q bezeichnet.

Bemerkung 4.33. Ein wichtiges Beispiel ist die *Hyperbelfunktion* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{c}{x}$ für ein $c > 0$. Sie drückt Antiproportionalität aus: Wächst die Größe x um den Faktor k, so verändert sich $f(x)$ um den Faktor $1/k$. Das Produkt bleibt $xf(x) = c$ bleibt stets konstant. Beliebtes Beispiel: 5 Korrektoren brauchen 20 Stunden für die Klausurkorrektur, wie lange braucht 1 Korrektor?

Lemma 4.34. *Eine rationale Funktion $f(x) = p(x)/q(x)$ lässt sich immer in die Form*

$$f(x) \;=\; s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

bringen, wobei $s(x)$ und $r(x)$ Polynomfunktionen sind und $\deg(r) < \deg(q)$ gilt.

Beweis. Polynomdivision $p(x) : q(x)$ □

4.3 Potenzreihenfunktionen

Wie berechnet man die Funktionswerte der Exponentialfunktion, oder des Logarithmus; oder von Sinus und Kosinus? Dies geschieht mit Hilfe von Potenzreihen! All die genannten Funktionen können nämlich als sog. Potenzreihenfunktion (s.u.) definiert werden. Dies sind in gewissem Sinne „unendliche“ Polynome; und haben den großen Vorteil, dass ihre Werte näherungsweise mit Hilfe von „normalen“ (endlichen) Polynomen berechnet werden können.

Definition 4.35. Eine *Potenzreihenfunktion* ist eine Funktion f der Form

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

mit $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{R}$. Hierbei ist D die Menge aller Werte x, für die *Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergiert. Die Werte a_k heißen *Koeffizienten* der Potenzreihe.

Bemerkung 4.36.

- Für jeden fest gewählten Wert von x ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Reihe im Sinne von Kapitel 3.3; insbesondere kann Konvergenz mit den dort behandelten Methoden untersucht werden. Aufgrund der speziellen Form der Reihenglieder spricht man von Potenzreihen.
- Man beachte: Die Folgeglieder der Partialsummenfolge sind Polynome. Dies erklärt, wie man den Funktionswert einer Potenzreihenfunktion näherungsweise mit Polynomen berechnen kann. Hierbei muss man beachten, dass wir die Konvergenz (momentan) für ein festes x untersuchen. Wird x variiert, kann dies Auswirkungen auf die Qualität der Annäherung haben. Wir gehen darauf später nochmal ein.

Definition 4.37. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe. Ihr *Konvergenzradius* r ist definiert durch

$$r \;:=\; \sup\{|s| \,:\, s \in D\} \;=\; \{|s| \,:\, s \in \mathbb{R}, \; \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k < \text{ konvergiert}\}.$$

Satz 4.38. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:*

(a) Ist $|x| < r$, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ absolut.

(b) Ist $|x| > r$, so divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Beweis. Aus der Definition des Konvergenzradius ergibt sich, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $|x| > r$ nicht konvergiert, also divergiert. Wir müssen also nur die erste Aussage zeigen.

Ist also $|x| < r$, so gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $|x| < |y| < r$, so dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ konvergiert. Nach Satz 3.45 gilt $a_k y^k \to 0$, insbesondere ist diese Folge dann beschränkt, es gibt also ein $M > 0$ mit $|a_k y_k| < M$ für alle $k \geq 0$. Setzen wir nun $q := \frac{|x|}{|y|}$, so ist $q \in (0,1)$, und es gilt

$$|a_k x^k| = |a_k y^k| \cdot \frac{|x|^k}{|y|^k} \;\leq\; M q^k.$$

Nach Satz 3.32 konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} Mq^k$; also können wir das Majorantenkriterium 3.41 anwenden und erhalten, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ absolut konvergiert. □

Bemerkung 4.39. Der vorstehende Satz sagt insbesondere: Ist r der Konvergenzradius einer Potenzreihe, so ist die zugehörige Potenzreihenfunktion mindestens auf $(-r, r)$ definiert, d.h. $(-r, r) \subset D$. Außerdem gilt $D \subset [-r, r]$; die Konvergenz in $x = r$ und $x = -r$ muss jeweils „individuell" überprüft werden.

Ist $r = 0$, so konvergiert die Potenzreihe nur für $x = 0$ - dort gilt stets $f(0) = a_0$. Ist $r = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist $D = \mathbb{R}$.

Zur Bestimmung des Konvergenzradius sind die folgenden Formeln nützlich.

Satz 4.40 (Formel von Hadamard). *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe. Gibt es ein $S \in [0, \infty) \cap \{\infty\}$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = S,$$

so gilt für den Potenzradius: $r = \infty$ falls $S = 0$, $r = 1/S$ für $S \in (0, \infty)$ sowie $r = 0$ für $S = \infty$.

Beweis. Hausaufgabe. □

Die zweite Formel folgt aus dem Quotientenkriterium.

Satz 4.41. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe. Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ und existiert ein $R \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$ mit*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

so gilt für den Konvergenzradius $r = R$.

Beweis. Hausaufgabe. □

Rechenregeln für Potenzreihen. (4.42)

Seien $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ zwei Potenzreihenfunktionen mit maximalen Definitionsbereichen D_f und D_g. Es sei $D := D_f \cap D_g$.

- Die Summe $f + g$ und die Differenz $f - g$ sind wiederum Potenzreihen. Sie konvergieren auf D und es gilt

$$(f+g)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k, \qquad (f-g)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k) x^k.$$

  Dies folgt aus den Rechenregeln für Reihen.

- Das Produkt $f \cdot g$ ist ebenfalls eine Potenzreihe welche auf D konvergiert, es gilt

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad \text{wobei } c_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Dies folgt aus Satz 3.48 über das Cauchy-Produkt.

Bemerkung 4.43. Man kann auch den Quotienten aus zwei Potenzreihen betrachten. Seien f, g wie zuvor, so kann $h := \frac{f}{g}$ auf $D \setminus N$ definiert werden, wobei N die Menge der Nullstellen von g ist. Allerdings ist nicht klar, ob h selbst wieder eine Potenzreihe ist.

Falls $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$ gelten würde, so folgt aus den Rechenregeln für das Produkt, unter Ausnutzung von $h \cdot g = f$, dass

$$a_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} b_k d_{n-k},$$

also insbesondere

$$a_0 = b_0 d_0, \quad a_1 = b_1 d_0 + b_0 d_1, \quad \ldots$$

und somit

$$d_0 = \frac{a_0}{b_0}, \quad d_1 \;=\; \frac{1}{b_0}(a_1 - b_1 d_0), \quad \ldots$$

Wir erhalten also eine rekursive Vorschrift zur Bestimmung der Koeffizienten von h, *vorausgesetzt*, dass $b_0 \neq 0$. Ist $b_0 = 0$, so lässt sich h nicht als Potenzreihe darstellen.

4.4 Exponential-, Logarithmus- und allgemeine Potenzfunktion

In den folgenden beiden Abschnitten lernen wir nun die Potenzreihendarstellungen der mit Abstand wichtigsten Funktionen kennen. Wir beginnen mit der Exponentialfunktion.

Proposition 4.44. *Die Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ *konvergiert für jedes* $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Der Beweis ist Hausaufgabe. □

Definition 4.45. Die *Exponentialfunktion* ist definiert als

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k.$$

Proposition 4.46. *Eigenschaften der Exponentialfunktion.*